

Kombinatorik

Grundaufgaben der Kombinatorik

Kombinatorik ist die Wissenschaft von der Bestimmung der Anzahl der Elemente endlicher Mengen.

Wird gebraucht zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Laplace Experimenten.

Ein Fundamentalprinzip

Gegeben sind k Mengen

Mengen	A_1	A_2	\dots	A_k
Anzahlen	n_1	n_2	\dots	n_k

Frage:

Wieviel Folgen aus k Elementen gibt es, bei denen das i -te Glied aus A_i ist?

Antwort:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

Ein Fundamentalprinzip

$$|\{(a_1, \dots, a_k); a_i \in A_i, i = 1, \dots, k\}| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k \quad (1)$$

Beispiel:

Herr X hat zwei Hemden, drei Hosen und 5 Paar Schuhe.
Auf wieviel verschiedene Arten kann er sich anziehen?

$$A_1 = \{\text{Hemden}\} \quad A_2 = \{\text{Hosen}\} \quad A_3 = \{\text{Schuhe}\}$$

Einem Tripel (a_1, a_2, a_3) entspricht genau eine Bekleidungsvariante. Nach Fundamentalprinzip (??):

$$|\{(a_1, a_2, a_3); a_i \in A_i, i = 1, 2, 3\}| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Die vier Grundaufgaben

Definition 1 Für $n, k \in \mathbb{N}$ sei

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (2)$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3)$$

$n!$ wird “ n -Fakultät” und $\binom{n}{k}$ wird “ n über k ” gelesen.

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (4)$$

Urnenmodell: n verschiedene Kugeln in einer Urne. Aus der Urne werden nacheinander k Kugeln entnommen.

Wieviel verschiedene Ergebnisse kann dieser Prozess haben?

Unterscheidungen:

- mit oder ohne Zurücklegen
- mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge

Beispiel: n Bälle liegen in einer Schachtel. Auf jedem steht der Name eines Schülers einer Klasse. Dann sollen von den n Schülern k durch Ziehen von Bällen aus der Schachtel ausgewählt werden.

- Mit Reihenfolge und mit Wiederholung: jeder Schüler kann jedesmal gezogen werden. Die Reihenfolge spielt eine Rolle.
- Mit Reihenfolge und ohne Wiederholung: ein Schüler, der einmal gezogen wurde, wird in den weiteren Durchgängen nicht mehr berücksichtigt; es kommt aber auf die Reihenfolge an.
- Ohne Reihenfolge und mit Wiederholung: kann jeder Schüler jedesmal gezogen werden, es kommt nicht darauf an, in welcher Reihenfolge.
- Ohne Reihenfolge ohne Wiederholung: jeder kann nur höchstens einmal gewählt werden. Die Reihenfolge, in der gezogen wird ist irrelevant (es werden einfach k Schüler ausgewählt).

Tabelle der Lösungen

		Wiederholung	
		mit	ohne
Reihen- folge	mit	n^k	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$
	ohne	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Die Beweise ergeben sich aus dem Fundamentalprinzip und anderen Überlegungen.

Beachte:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

und

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiele:

- (B1) Eine Okarina hat 8 Löcher, jedes Loch kann beim Blasen geschlossen oder offen sein, jedem Muster von offenen und geschlossenen Löchern entspricht ein anderer Ton. Wieviel verschiedene Töne gibt es auf der Okarina?

Lösung: Urne mit zwei Kugeln “geschlossen — offen”. Für jedes Loch wird in die Urne gegriffen und dadurch entschieden, ob das Loch offen oder geschlossen sein soll. Die gezogene Kugel wird zurückgelegt; also mit Reihenfolge und Wiederholung, d.h. Anzahl der Töne

$$= 2^8 = 256$$

(B2) Eine Wohngemeinschaft mit 5 Mitgliedern bezieht ein Haus mit 7 Zimmern. Wieviel Möglichkeiten gibt es, das Haus zu belegen, wenn jeder genau ein Zimmer bekommt?

Lösung: Für jedes Zimmer wird eine Kugel in eine Urne gelegt und der Reihe nach zieht jeder eine Kugel aus der Urne, die dem Zimmer entspricht, was er oder sie bezieht. Das Problem ist mit Reihenfolge aber ohne Wiederholung. Anzahl der Belegungen

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

(B3) Es wird dreimal gewürfelt. Die größte Zahl wird mit 100, die zweitgrößte mit 10 und die kleinste mit 1 multipliziert, dann werden diese drei Zahlen addiert. (Wenn also der Reihe nach 3-6-5 geworfen wird, berechnet man 653, bei 2-3-2 ergibt sich 322). Wieviel Zahlen sind als Ergebnis möglich?

Lösung: Das Problem berücksichtigt die Reihenfolge nicht, aber Wiederholungen sind möglich, d.h. mit $n = 6, k = 3$:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl} &= \\ \binom{6+3-1}{3} &= \binom{8}{3} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= 56 \end{aligned}$$

(B4) Wieviel Möglichkeiten gibt es zur Auswahl der 6 Richtigen beim Lotto?

Lösung: Es werden Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 49 aus einer Urne gezogen ohne Wiederholung, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

$$\begin{aligned} \text{Anzahl} &= \\ \binom{49}{6} &= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= 13983816 \end{aligned}$$

Ergänzungen

- Permutation von n Elementen: Die Elemente werden in eine neue Reihenfolge geracht ohne Wiederholung mit Reihenfolge

Anzahl der Permutationen ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

- Auf wieviel Arten kann man eine Menge von n Elementen in r Teilmengen A_1, A_2, \dots, A_r zerlegen mit $|A_i| = n_i$ $i = 1, \dots, r$, wobei außerdem $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ erfüllt sein muß?

Anzahl:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Beispiele

- Auf wieviel Arten können die Skatkarten beim Skat-spiel verteilt werden? Es müssen 32 Karten aufgeteilt werden in 4 Mengen zu 10-10-10-2 Elementen, also

$$\frac{32!}{10!10!10!2!}$$

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Lotto 4 Richtige zu haben?

Lösung:

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{43 \cdot 42}{1 \cdot 2} = 13545.$$